Colle du 3 octobre: Séries positives

4.1 Première série

Exercice 1: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série $\sum\left((\mathrm{ch} n)^\alpha - (\mathrm{sh} n)^\alpha\right)$. Selon les cas, donner un équivalent de la suite des sommes partielles ou de la suite des restes.

Exercice 2: Soit (u_n) une suite de réels positifs. Posons $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n}\right)$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite (v_n) converge.

Exercice 3:
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable.
2. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement $\mathbb{Q}$?

Exercice 4: On se donne une suite $(u_n)_n$ de réels strictement positifs. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Étudier la nature de $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ selon les valeurs de α.

4.2 Deuxième série

Exercice 1: Donner la nature de la série $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}$.

Exercice 2: Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.
1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$?
2. Même question pour $\sum \frac{\sigma(n)}{n^3}$.

Exercice 3: Considérons une suite (u_n) telle que $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 4: Pour $n \in \mathbb{N}$, soit q_n le plus grand facteur premier de n. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n q_n}$?

4.3 Troisième série

Exercice 1: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Soit $a > 1$. Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{a^{p_n}}$ et, lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

Exercice 2: Soit $(a_n)_n$ une suite réelle telle que $a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 \to 1$. Donner un équivalent de a_n.

Exercice 3: On considère N triangles rectangles identiques dans le plan. On choisit l'un d'entre eux et on le coupe selon sa hauteur la plus courte, obtenant ainsi $N+1$ triangles rectangles. On répète cette opération un nombre fini de fois. Montrer qu'à la fin il y a au moins $\frac{N+1}{4}$ triangles identiques.

Exercice 4: Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante telle que $2u_{2n} \leq u_n$ et $u_n = o(1/n)$. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min(u_n, \frac{1}{n \ln n})$ diverge aussi.